模範解答

I

(1)	P1 → P3 → P5	
(2)	各ルートについて，バッテリー残量（50 Wh）の制約を満たすか確認し，その中で最短時間を探る。 • P1→P2→P3→P4→P5：走行時間は 12+8+15+15=50 秒（最速），消費電力量は 15+10+18+18=61Wh。消費電力量がバッテリー残量より多いため，走行不可能。 • P1→P3→P4→P5：走行時間は 25+15+15=55 秒，消費電力量は 20+18+18=56Wh。消費電力量がバッテリー残量より多いため，走行不可能。 • P1→P2→P3→P5：走行時間は 12+8+35=55 秒，消費電力量は 15+10+30=55Wh。消費電力量がバッテリー残量より多いため，走行不可能。 • P1→P2→P4→P5：走行時間は 12+30+15=57 秒，消費電力量は 15+35+18=68Wh。消費電力量がバッテリー残量より多いため，走行不可能。 • P1→P3→P5：走行時間は 25+35=60 秒，消費電力量は 20+30=50Wh。消費電力量がバッテリー残量とちょうど等しいため，目的地に到達可能。 以上の比較より，50Wh 以内で走行できる唯一のルートであり，かつ最短である P1→P3→P5 が選択すべきルートである。	
(3)	②	④

模範解答

Ⅱ

(1)	（ア）	Nokori ／ Koka[i]						
	（イ）	Nokori ％ Koka[i] （または Nokori - Koka[i] * Maisu）						
	（ウ）	Nokori ＞ 0						
(2)	（エ）	5	（オ）	1	（カ）	0	（キ）	4
(3)	（ク）	2	（ケ）	0	（コ）	2	（サ）	0
(4)	②							

模範解答

$\boxed{\text{III}}$

(1) ベクトル $\vec{p}$ を $\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とおくと $\vec{a}=(-1,\ 2,\ 2)$ と垂直になることより

$$-x+2y+2z=0$$

$\vec{b}=(1,\ 4,\ 2)$ と垂直になることより

$$x+4y+2z=0$$

大きさが $\sqrt{17}$ となることより

$$x^2+y^2+z^2=17$$

第 1 式と第 2 式の差より

$$-2x-2y=0$$

よって

$$y=-x$$

これを第 1 式に代入すると，

$$-3x+2z=0$$

よって

$$z=\frac{3}{2}x$$

$y=-x$，$z=3x/2$ を第 3 式に代入して

$$x^2+x^2+\frac{9}{4}x^2=\frac{17x^2}{4}=17$$

よって

$$x=\pm 2$$

このとき，

$$y=-x=\mp 2, \quad z=\frac{3}{2}x=\pm 3$$

以上より求める $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=(2,\ -2,\ 3),\ (-2,\ 2,\ -3)$$

(2)

$$\begin{aligned}
\log_{10} 0.2^{20} &= \log_{10}\left(\frac{2}{10}\right)^{20} \\
&= 20\log_{10}\frac{2}{10} = 20\left(\log_{10} 2-\log_{10} 10\right) \\
&= 20(0.3010-1)=20(-0.6990) \\
&= -13.980
\end{aligned}$$

よって

$$-14 < \log_{10} 0.2^{20} < -13$$

すなわち，

$$\log_{10} 10^{-14} < \log_{10} 0.2^{20} < \log_{10} 10^{-13}$$

$\log_{10} x$ は単調増加関数であるので，

$$10^{-14} < 0.2^{20} < 10^{-13}$$

したがって，0.2^{20} は **小数点第 14 位で初めて 0 でない数が現れる**。

(3) 各回の操作において，赤，青，白の玉が取り出される確率はすべて $\dfrac{1}{3}$ であり，各試行は独立である。取り出された 6 個の玉の中に，赤，青，白が少なくとも 1 個含まれる事象をそれぞれ A, B, C とすると，求める確率は $P(A \cap B \cap C)$ である。その余事象は，ド・モルガンの法則より

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cap B \cap C}) &= P\left((\overline{A \cap B}) \cup \overline{C}\right) \\ &= P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \end{aligned}$$

となる。よって，

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) =& \{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) + P(\overline{C})\} \\ & - \{P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(\overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{C} \cap \overline{A})\} \\ & + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \end{aligned}$$

ここで，各確率は以下の通りである。

- $P(\overline{A})$ は 6 回とも赤以外の 2 色が出る確率なので，$P(\overline{A}) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^6 = \dfrac{64}{729}$
  同様に，$P(\overline{B}) = P(\overline{C}) = \dfrac{64}{729}$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ は 6 回とも赤と青以外の 1 色（白のみ）が出る確率なので，
  $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^6 = \dfrac{1}{729}$ 同様に，$P(\overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{C} \cap \overline{A}) = \dfrac{1}{729}$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ は 3 色とも出ない確率であるが，これは起こり得ないため 0 である。

これらを代入すると，

$$P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = 3 \times \frac{64}{729} - 3 \times \frac{1}{729} + 0 = \frac{192 - 3}{729} = \frac{189}{729}$$

求める確率は，

$$P(A \cap B \cap C) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = 1 - \frac{189}{729} = \frac{540}{729} = \frac{20}{27}$$

模範解答

$\boxed{\text{IV}}$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}=2\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2}=\mathbf{3}$

(2)

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2&=\left|(\sin\theta)\vec{a}+(\cos\theta)\vec{b}\right|^2\\&=\left|\vec{a}\right|^2\sin^2\theta+2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\sin\theta\cos\theta+\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\theta\\&=4\sin^2\theta+6\sin\theta\cos\theta+9\cos^2\theta\end{aligned}$$

半角の公式および 2 倍角の公式 $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2},\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2},2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$ を用いる。

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2&=4\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}+3\sin 2\theta+9\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\\&=2-2\cos 2\theta+3\sin 2\theta+\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\cos 2\theta\\&=\boldsymbol{3\sin 2\theta+\frac{5}{2}\cos 2\theta+\frac{13}{2}}\end{aligned}$$

(3) 三角関数の合成を行う。

$$3\sin 2\theta+\frac{5}{2}\cos 2\theta=\sqrt{3^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}\sin(2\theta+\alpha)=\frac{\sqrt{61}}{2}\sin(2\theta+\alpha)$$

ただし α は $\cos\alpha=\dfrac{6}{\sqrt{61}},\sin\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{61}}$ を満たす鋭角である。$0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$ より $0\leq 2\theta\leq\pi$ なので $\alpha\leq 2\theta+\alpha\leq\pi+\alpha$。

以上より

- 最大値： $\sqrt{\dfrac{\sqrt{61}+13}{2}}$　$(2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$のとき$)$
- 最小値： $\mathbf{2}$　$(\theta=\dfrac{\pi}{2}$のとき$)$

模範解答

$\boxed{\text{V}}$

(1) C は点 O(0, 0) を通るので，$f(x) = ax^2 + bx$ とおける。このとき両辺を x で微分すると，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\left[\frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2}\right]_0^x \\ &= ax^2 + bx \\ \frac{d}{dx}\left(xf(x) - \frac{2}{3}x^3\right) &= \frac{d}{dx}(ax^3 + bx^2) - 2x^2 \\ &= 3ax^2 + 2bx - 2x^2 \end{aligned}$$

よって，

$$ax^2 + bx = (3a - 2)x^2 + 2bx$$

係数比較すると，$a = 1, b = 0$

よって，

$$\boldsymbol{f(x) = x^2}$$

(2) $f'(x_n) = 2x_n$ より，接線の方程式は $y - x_n^2 = 2x_n(x - x_n)$。

これを整理して，$y = 2x_n x - x_n^2$

(3) 接線 $y = 2x_n x - x_n^2$ と x 軸 $(y = 0)$ の交点が x_{n+1} であるから，

$0 = 2x_n x_{n+1} - x_n^2 \implies x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} \quad (x_n \neq 0)$

初項 $x_1 = 1$，公比 1/2 の等比数列であるから，$x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$