

模範解答

I

(1)	P1 → P3 → P5	
(2)	各ルートについて、バッテリー残量 (50 Wh) の制約を満たすか確認し、その中で最短時間を探る。 • P1→P2→P3→P4→P5 : 走行時間は $12+8+15+15=50$ 秒 (最速), 消費電力量は $15+10+18+18=61\text{Wh}$。消費電力量がバッテリー残量より多いため, 走行不可能。 • P1→P3→P4→P5 : 走行時間は $25+15+15=55$ 秒, 消費電力量は $20+18+18=56\text{Wh}$。消費電力量がバッテリー残量より多いため, 走行不可能。 • P1→P2→P3→P5 : 走行時間は $12+8+35=55$ 秒, 消費電力量は $15+10+30=55\text{Wh}$。消費電力量がバッテリー残量より多いため, 走行不可能。 • P1→P2→P4→P5 : 走行時間は $12+30+15=57$ 秒, 消費電力量は $15+35+18=68\text{Wh}$。消費電力量がバッテリー残量より多いため, 走行不可能。 • P1→P3→P5 : 走行時間は $25+35=60$ 秒, 消費電力量は $20+30=50\text{Wh}$。消費電力量がバッテリー残量とちょうど等しいため, 目的地に到達可能。 以上の比較より, 50Wh 以内で走行できる唯一のルートであり, かつ最短である P1→P3→P5 が選択すべきルートである。	
(3)	②	④

模範解答

II

(1)	(ア)	nokori ÷ Koka[i]						
	(イ)	nokori % Koka[i] (または nokori - Koka[i] * maisu)						
	(ウ)	nokori > 0 (または nokori ≠ 0)						
(2)	(エ)	5	(オ)	1	(カ)	0	(キ)	4
(3)	(ク)	2	(ケ)	0	(コ)	2	(サ)	0
(4)	②							

模範解答

III

(1) ベクトル $\vec{p}$ を $\vec{p} = (x, y, z)$ とおくと $\vec{a} = (-1, 2, 2)$ と垂直になることより

$$-x + 2y + 2z = 0$$

$\vec{b} = (1, 4, 2)$ と垂直になることより

$$x + 4y + 2z = 0$$

大きさが $\sqrt{17}$ となることより

$$x^2 + y^2 + z^2 = 17$$

第1式と第2式の差より

$$-2x - 2y = 0$$

よって

$$y = -x$$

これを第1式に代入すると,

$$-3x + 2z = 0$$

よって

$$z = \frac{3}{2}x$$

$y = -x$, $z = 3x/2$ を第3式に代入して

$$x^2 + x^2 + \frac{9}{4}x^2 = \frac{17x^2}{4} = 17$$

よって

$$x = \pm 2$$

このとき,

$$y = -x = \mp 2, \quad z = \frac{3}{2}x = \pm 3$$

以上より求める $\vec{p}$ は

$$\vec{p} = (2, -2, 3), (-2, 2, -3)$$

(2)

$$\begin{aligned} \log_{10} 0.2^{20} &= \log_{10} \left(\frac{2}{10} \right)^{20} \\ &= 20 \log_{10} \frac{2}{10} = 20 (\log_{10} 2 - \log_{10} 10) \\ &= 20(0.3010 - 1) = 20(-0.6990) \\ &= -13.980 \end{aligned}$$

よって

$$-14 < \log_{10} 0.2^{20} < -13$$

すなわち,

$$\log_{10} 10^{-14} < \log_{10} 0.2^{20} < \log_{10} 10^{-13}$$

$\log_{10} x$ は単調増加関数であるので,

$$10^{-14} < 0.2^{20} < 10^{-13}$$

したがって, 0.2^{20} は **小数点第 14 位で初めて 0 でない数が現れる**。

- (3) 各回の操作において, 赤, 青, 白の玉が取り出される確率はすべて $\frac{1}{3}$ であり, 各試行は独立である。取り出された 6 個の玉の中に, 赤, 青, 白が少なくとも 1 個含まれる事象をそれぞれ A, B, C とすると, 求める確率は $P(A \cap B \cap C)$ である。その余事象は, ド・モルガンの法則より

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cap B \cap C}) &= P((\overline{A \cap B}) \cup \overline{C}) \\ &= P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) &= \{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) + P(\overline{C})\} \\ &\quad - \{P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(\overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{C} \cap \overline{A})\} \\ &\quad + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \end{aligned}$$

ここで, 各確率は以下の通りである。

- $P(\overline{A})$ は 6 回とも赤以外の 2 色が出る確率なので, $P(\overline{A}) = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$

同様に, $P(\overline{B}) = P(\overline{C}) = \frac{64}{729}$

- $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ は 6 回とも赤と青以外の 1 色 (白のみ) が出る確率なので,

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729} \quad \text{同様に,} \quad P(\overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{C} \cap \overline{A}) = \frac{1}{729}$$

- $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ は 3 色とも出ない確率であるが, これは起こり得ないため 0 である。

これらを代入すると,

$$P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = 3 \times \frac{64}{729} - 3 \times \frac{1}{729} + 0 = \frac{192 - 3}{729} = \frac{189}{729}$$

求める確率は,

$$P(A \cap B \cap C) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = 1 - \frac{189}{729} = \frac{540}{729} = \frac{20}{27}$$

模範解答

IV

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

(2)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{OP}}|^2 &= |(\sin \theta) \vec{a} + (\cos \theta) \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 \sin^2 \theta + 2 (\vec{a} \cdot \vec{b}) \sin \theta \cos \theta + |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta \\ &= 4 \sin^2 \theta + 6 \sin \theta \cos \theta + 9 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

半角の公式および2倍角の公式 $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$, $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$, $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ を用いる。

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{OP}}|^2 &= 4 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + 3 \sin 2\theta + 9 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ &= 2 - 2 \cos 2\theta + 3 \sin 2\theta + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} \cos 2\theta \\ &= 3 \sin 2\theta + \frac{5}{2} \cos 2\theta + \frac{13}{2} \end{aligned}$$

(3) 三角関数の合成を行う。

$$3 \sin 2\theta + \frac{5}{2} \cos 2\theta = \sqrt{3^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} \sin(2\theta + \alpha) = \frac{\sqrt{61}}{2} \sin(2\theta + \alpha)$$

ただし α は $\cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{61}}$, $\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{61}}$ を満たす鋭角である。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より $0 \leq 2\theta \leq \pi$ なので $\alpha \leq 2\theta + \alpha \leq \pi + \alpha$ 。

以上より

- 最大値： $\sqrt{\frac{\sqrt{61} + 13}{2}}$ ($2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき)
- 最小値： 2 ($\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき)

模範解答

□ V

- (1) C は点 O(0,0) を通るので, $f(x) = ax^2 + bx$ とおける。このとき両辺を x で微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt &= \frac{d}{dx} \left[\frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2} \right]_0^x \\ &= ax^2 + bx \\ \frac{d}{dx} \left(xf(x) - \frac{2}{3}x^3 \right) &= \frac{d}{dx} (ax^3 + bx^2) - 2x^2 \\ &= 3ax^2 + 2bx - 2x^2\end{aligned}$$

よって,

$$ax^2 + bx = (3a - 2)x^2 + 2bx$$

係数比較すると, $a = 1, b = 0$

よって,

$$f(x) = x^2$$

- (2) $f'(x_n) = 2x_n$ より, 接線の方程式は $y - x_n^2 = 2x_n(x - x_n)$ 。

これを整理して, $y = 2x_nx - x_n^2$

- (3) 接線 $y = 2x_nx - x_n^2$ と x 軸 ($y = 0$) の交点が x_{n+1} であるから,

$$0 = 2x_nx_{n+1} - x_n^2 \implies x_{n+1} = \frac{x_n}{2} \quad (x_n \neq 0)$$

初項 $x_1 = 1$, 公比 $1/2$ の等比数列であるから, $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$